TRIANGLES (INÉGALITÉ, ANGLES, CAS D'ÉGALITÉ)

COURS

Triangles : inégalité, angles, cas d'égalité

DURÉE ESTIMÉE

25 minutes

OBJECTIFS DU CHAPITRE

- Vérifier qu'un triangle est constructible
- Construire un triangle à partir de trois données
- Utiliser les propriétés d'un triangle particulier
- Tracer médiatrices et hauteurs d'un triangle
- Utiliser un cas d'égalité des triangles

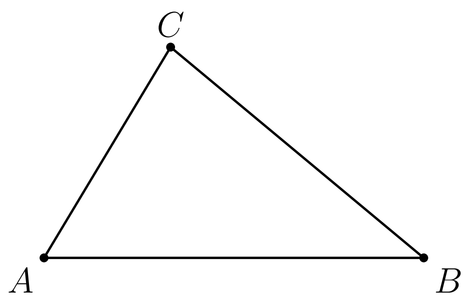
1 - Inégalité triangulaire

Inégalité triangulaire

Dans un triangle (non aplati), la longueur de chaque côté est **strictement inférieure** à la somme des longueurs des deux autres côtés.

Dans un triangle ABC, on a :

$AB < AC + CB$, $AC < AB + BC$ et $BC < BA + AC$.



Condition de construction d'un triangle

Trois longueurs permettent de construire un triangle si et seulement si la plus grande des trois est **strictement inférieure** à la somme des deux autres.

Si la plus grande longueur est égale à la somme des deux autres, les trois points sont **alignés** et le triangle est **aplati**.

Triangle constructible

Peut-on construire un triangle de côtés 4 cm, 7 cm et 5 cm ?

La plus grande longueur est 7. La somme des deux autres est $4+5=9$.

Comme $7<9$, le triangle est constructible.

Triangle non constructible

Peut-on construire un triangle de côtés 3 cm, 4 cm et 8 cm ?

La plus grande longueur est 8. La somme des deux autres est $3+4=7$.

Comme $8>7$, le triangle n'est **pas** constructible.

Attention

Il suffit de tester l'inégalité avec la plus grande longueur. Si $\ell_{\max}<\ell_1+\ell_2$, alors les deux autres inégalités sont automatiquement vraies.

2 - Construire un triangle

Trois façons de déterminer un triangle

Un triangle peut être construit à partir de trois données :

- ses **trois côtés** (méthode CCC),
- **deux côtés et l'angle** qu'ils forment (méthode CAC),
- **un côté et les deux angles adjacents** à ce côté (méthode ACA).

Construire avec trois côtés (CCC)

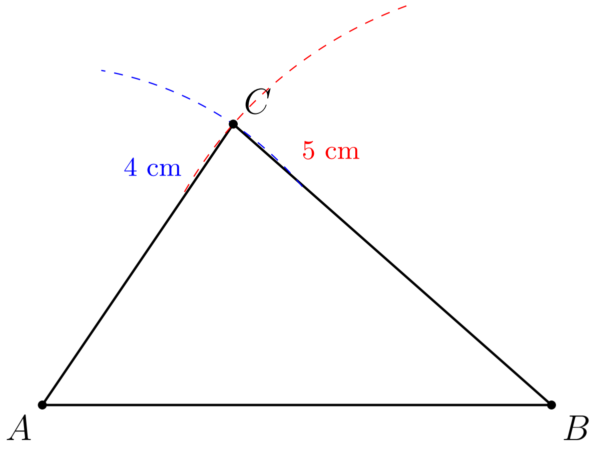
Construire le triangle ABC tel que $AB = 6$ cm, $AC = 4$ cm et $BC = 5$ cm.

Étape 1 : Tracer le segment $[AB]$ de longueur 6 cm.

Étape 2 : Tracer le cercle de centre A et de rayon 4 cm.

Étape 3 : Tracer le cercle de centre B et de rayon 5 cm.

Étape 4 : Placer C à l'intersection des deux cercles, puis tracer $[AC]$ et $[BC]$.



Construire avec deux côtés et un angle (CAC)

Construire le triangle DEF tel que $DE = 5$ cm, $DF = 4$ cm et $\widehat{EDF} = 60^\circ$.

Étape 1 : Tracer le segment $[DE]$ de longueur 5 cm.

Étape 2 : Tracer au rapporteur une demi-droite issue de D formant un angle de 60° avec $[DE]$.

Étape 3 : Sur cette demi-droite, placer le point F à 4 cm de D.

Étape 4 : Tracer le segment $[EF]$.

Construire avec un côté et deux angles (ACA)

Construire le triangle MNP tel que $MN = 6$ cm, $\widehat{NMP} = 50^\circ$ et $\widehat{MNP} = 40^\circ$.

Étape 1 : Tracer le segment $[MN]$ de longueur 6 cm.

Étape 2 : Au point M, tracer une demi-droite formant un angle de 50° avec

$[MN]$.

Étape 3 : Au point N, tracer une demi-droite formant un angle de 40° avec $[NM]$, du même côté de (MN).

Étape 4 : Le point P est à l'intersection des deux demi-droites.

Remarque

Pour que la construction ACA soit possible, la somme des deux angles donnés doit être strictement inférieure à 180° (sinon les deux demi-droites ne se coupent pas).

3 - Triangles particuliers

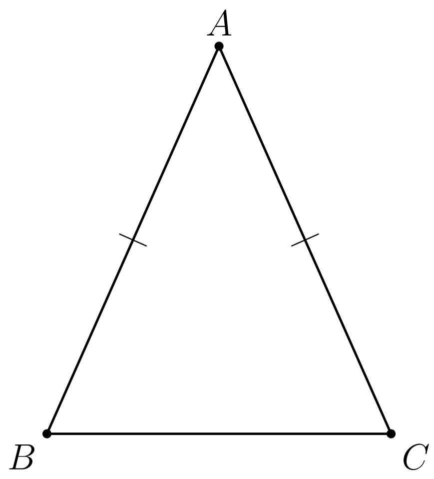
Triangle isocèle

Un triangle est **isocèle** s'il a deux côtés de même longueur. Le sommet commun à ces deux côtés s'appelle le **sommet principal** et le troisième côté est la **base**.

Propriétés du triangle isocèle

Si un triangle est isocèle, alors les deux **angles à la base** ont la même mesure.

Réciproquement, si un triangle a deux angles de même mesure, alors il est isocèle.



Exemple

Le triangle ABC est isocèle en A, avec $\widehat{ABC} = 72^\circ$. Calculer $\widehat{ACB}$ puis $\widehat{BAC}$.

Les angles à la base sont $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$, donc $\widehat{ACB} = 72^\circ$.

La somme des angles vaut 180° :

$\widehat{BAC} = 180 - 72 - 72 = 36^\circ$.

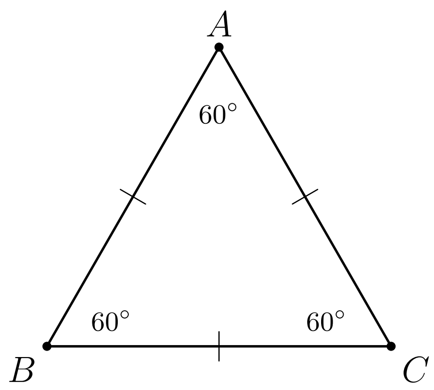
Triangle équilatéral

Un triangle est **équilatéral** si ses trois côtés ont la même longueur.

Angles d'un triangle équilatéral

Si un triangle est équilatéral, alors ses trois angles mesurent chacun 60°.

Réciproquement, si un triangle a ses trois angles égaux, alors il est équilatéral.



Exemple

Dans un triangle équilatéral RST, on a immédiatement $RS = ST = TR$ et $\widehat{RST} = \widehat{STR} = \widehat{TRS} = 60^\circ$.

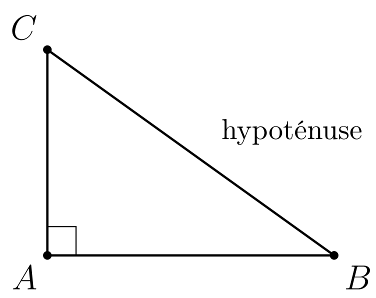
Vérification : $60 + 60 + 60 = 180$, la somme des angles vaut bien 180°.

Triangle rectangle

Un triangle est **rectangle** s'il possède un angle droit. Le côté opposé à l'angle droit s'appelle l'**hypoténuse** ; c'est le plus long côté du triangle.

Angles aigus d'un triangle rectangle

Dans un triangle rectangle, les deux angles aigus sont **complémentaires** : leur somme vaut 90°.



Exemple

Le triangle ABC est rectangle en A et $\widehat{ABC} = 35^\circ$. Calculer $\widehat{ACB}$.

Les angles aigus $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$ sont complémentaires :

$\widehat{ACB} = 90 - 35 = 55^\circ$.

Attention

Un triangle peut être **rectangle et isocèle** en même temps (angle droit et deux côtés égaux) ; ses deux angles aigus mesurent alors 45° chacun.

4 - Médiatrices et hauteurs d'un triangle

Médiatrice d'un segment (rappel)

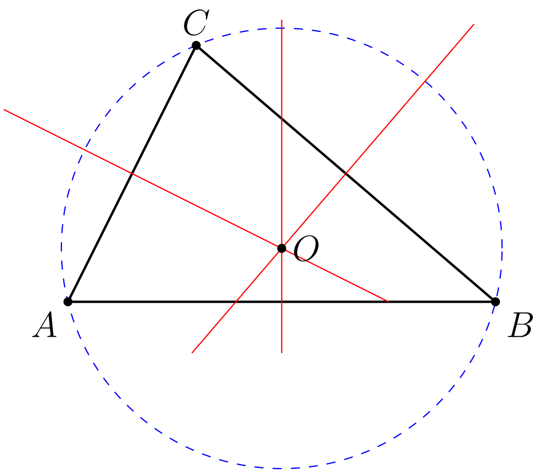
La **médiatrice** d'un segment est la droite **perpendiculaire** à ce segment qui passe par son **milieu**.

Médiatrices d'un triangle

Un triangle a trois côtés, donc **trois médiatrices** (une par côté).

Point de concours des médiatrices

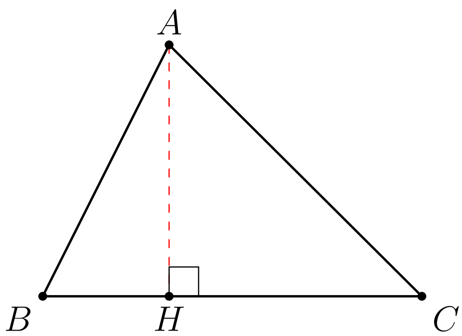
Les trois médiatrices d'un triangle sont **concourantes** (elles se coupent en un même point). Ce point est le **centre du cercle circonscrit** au triangle : c'est l'unique cercle qui passe par les trois sommets.



Hauteur d'un triangle

Dans un triangle, la **hauteur issue d'un sommet** est la droite qui passe par ce sommet et qui est **perpendiculaire** au côté opposé (ou à son prolongement).

Un triangle a trois sommets, donc **trois hauteurs**.



Point de concours des hauteurs

Les trois hauteurs d'un triangle sont **concourantes**. Leur point d'intersection s'appelle l'**orthocentre** du triangle.

Remarque

Dans un triangle isocèle de sommet principal A, la hauteur issue de A est aussi la médiatrice du côté opposé $[BC]$. Cette droite porte l'**axe de symétrie** du triangle.

5 - Cas d'égalité des triangles

Triangles égaux

Deux triangles sont **égaux** (ou **superposables**) lorsque leurs côtés sont deux à deux de même longueur et leurs angles deux à deux de même mesure.

Conséquence

Si deux triangles sont égaux, alors tous leurs éléments correspondants (côtés, angles) ont la même mesure.

Pour démontrer que deux triangles sont égaux, il suffit en réalité de vérifier **trois informations bien choisies** parmi leurs six mesures. Ce sont les **cas d'égalité**.

1er cas d'égalité (CCC : côté-côté-côté)

Si deux triangles ont leurs **trois côtés** deux à deux de même longueur, alors ils sont égaux.

Exemple

On considère deux triangles ABC et DEF tels que $AB = DE = 5$, $BC = EF = 6$ et $AC = DF = 4$.

Les trois côtés sont deux à deux égaux : les triangles ABC et DEF sont égaux (cas CCC).

2e cas d'égalité (CAC : côté-angle-côté)

Si deux triangles ont **un angle de même mesure compris entre deux côtés deux à deux de même longueur**, alors ils sont égaux.

Exemple

Dans deux triangles ABC et DEF, on sait que $AB = DE$, $AC = DF$ et $\widehat{BAC} = \widehat{EDF}$.

L'angle est compris entre les deux côtés égaux : les triangles ABC et DEF sont égaux (cas CAC).

3e cas d'égalité (ACA : angle-côté-angle)

Si deux triangles ont **un côté de même longueur, encadré par deux angles deux à deux de même mesure**, alors ils sont égaux.

Exemple

Dans deux triangles ABC et DEF, on sait que $BC = EF$, $\widehat{ABC} = \widehat{DEF}$ et $\widehat{ACB} = \widehat{DFE}$.
Le côté est compris entre les deux angles égaux : les triangles ABC et DEF sont égaux (cas ACA).

Attention

Pour le cas CAC, l'angle doit être **compris entre** les deux côtés égaux (c'est-à-dire avoir ces deux côtés pour côtés). Si l'angle est ailleurs, le cas CAC ne s'applique pas.

Pour le cas ACA, le côté doit être **encadré** par les deux angles donnés.

Les questions essentielles

1. Comment vérifier que trois longueurs permettent de construire un triangle ?

Identifier la plus grande longueur et la comparer à la somme des deux autres. Si elle est strictement inférieure, le triangle est constructible.

Voir la fiche méthode : Vérifier qu'un triangle est constructible

2. Comment construire un triangle à la règle et au compas ?

Choisir la méthode selon les données : trois côtés (cercles de rayons donnés), deux côtés et un angle (rapporteur), un côté et deux angles (deux demi-droites issues des extrémités).

Voir la fiche méthode : Construire un triangle à partir de trois données

3. Comment utiliser les propriétés d'un triangle particulier ?

Identifier le type de triangle (isocèle, équilatéral, rectangle), puis appliquer la propriété correspondante : égalité de côtés, égalité d'angles à la base, angles complémentaires dans un rectangle...

Voir la fiche méthode : Utiliser les propriétés d'un triangle particulier

4. Comment tracer les médiatrices et les hauteurs d'un triangle ?

La médiatrice d'un côté passe par le milieu de ce côté perpendiculairement. La hauteur issue d'un sommet est la perpendiculaire au côté opposé passant par ce sommet.

Voir la fiche méthode : Tracer médiatrices et hauteurs d'un triangle

5. Comment démontrer que deux triangles sont égaux ?

Identifier trois informations correspondantes (longueurs et angles) et reconnaître le bon cas d'égalité : CCC, CAC (angle entre les deux côtés) ou ACA (côté entre les deux angles).

Voir la fiche méthode : Utiliser un cas d'égalité des triangles