Proportionnalité, pourcentages, échelles

DURÉE ESTIMÉE

20 minutes

1 - Reconnaître une situation de proportionnalité

Grandeurs proportionnelles

Deux grandeurs sont **proportionnelles** si les valeurs de l'une s'obtiennent en multipliant les valeurs de l'autre par un même nombre, appelé **coefficient de proportionnalité**.

Tableau de proportionnalité

Un tableau est un **tableau de proportionnalité** lorsque les valeurs de la deuxième ligne s'obtiennent en multipliant les valeurs de la première ligne par un même nombre (le coefficient de proportionnalité).
Le coefficient de proportionnalité se calcule par le rapport :

$$k = \frac{\text{valeur de la 2e ligne}}{\text{valeur de la 1re ligne}}$$

Exemple

Des fruits coûtent $2{,}50$ euros le kilogramme. Le prix est proportionnel à la masse achetée.

Masse (kg)	1	2	5
Prix (euros)	$2{,}50$	$5{,}00$	$12{,}50$

On vérifie : $\dfrac{2{,}50}{1} = 2{,}5$, $\dfrac{5}{2} = 2{,}5$, $\dfrac{12{,}50}{5} = 2{,}5$.
Tous les quotients sont égaux : c'est un tableau de proportionnalité. Le coefficient est $2{,}5$.

Exemple

La taille d'un enfant n'est pas proportionnelle à son âge.

Âge (années)	1	2	10
Taille (cm)	75	85	140

On calcule les quotients : $\dfrac{75}{1} = 75$, $\dfrac{85}{2} = 42{,}5$, $\dfrac{140}{10} = 14$.
Les quotients ne sont pas égaux : la taille et l'âge ne sont **pas** des grandeurs proportionnelles.

Attention

Pour vérifier si un tableau est un tableau de proportionnalité, il faut calculer **tous** les quotients. Un seul quotient différent suffit pour conclure que les grandeurs ne sont pas proportionnelles.

2 - Calculer une quatrième proportionnelle

Propriété

Dans un tableau de proportionnalité à quatre cases dont trois valeurs sont connues, on peut calculer la quatrième valeur, appelée **quatrième proportionnelle**.

Par le coefficient de proportionnalité

3 kg de pommes coûtent $7{,}50$ euros. Combien coûtent 5 kg ?

Masse (kg)	3	5
Prix (euros)	$7{,}50$	$?$

On calcule le coefficient : $k = \dfrac{7{,}50}{3} = 2{,}5$.

Le prix de 5 kg est : $5 \times 2{,}5 = 12{,}50$ euros.

Par retour à l'unité

4 cahiers coûtent 6 euros. Combien coûtent 7 cahiers ?

On calcule d'abord le prix d'un cahier :

1 cahier coûte $\dfrac{6}{4} = 1{,}50$ euro.

Donc 7 cahiers coûtent $7 \times 1{,}50 = 10{,}50$ euros.

Produit en croix

Si quatre nombres a, b, c et d (avec $a \neq 0$) vérifient $\dfrac{b}{a} = \dfrac{d}{c}$, alors :

$$a \times d = b \times c$$

Dans un tableau de proportionnalité, on peut utiliser cette propriété pour calculer la valeur manquante :

a	c
b	d

On en déduit par exemple : $d = \dfrac{b \times c}{a}$.

Par produit en croix

Un robinet remplit 12 litres en 5 minutes. Quel volume remplit-il en 8 minutes ?

Temps (min)	5	8
Volume (L)	12	x

Par produit en croix : $5 \times x = 12 \times 8$, donc $x = \dfrac{12 \times 8}{5} = \dfrac{96}{5} = 19{,}2$.

Le robinet remplit $19{,}2$ litres en 8 minutes.

Propriétés de linéarité

Dans un tableau de proportionnalité :

- on peut **multiplier** (ou diviser) les valeurs d'une colonne par un même nombre pour obtenir une autre colonne,
- on peut **additionner** (ou soustraire) les valeurs de deux colonnes pour obtenir les valeurs d'une troisième colonne.

Exemple

On sait que 3 kg coûtent $7{,}50$ euros et que 5 kg coûtent $12{,}50$ euros.

Masse (kg)	3	5	8
Prix (euros)	$7{,}50$	$12{,}50$	$?$

Par additivité : $8 = 3 + 5$, donc le prix est $7{,}50 + 12{,}50 = 20$ euros.

3 - Pourcentages

Définition

Un **pourcentage** est une proportion exprimée par rapport à 100. Écrire « $t\,\%$ » signifie « t pour 100 », c'est-à-dire la fraction $\dfrac{t}{100}$.

Exemple

- $25\,\% = \dfrac{25}{100} = 0{,}25$
- $50\,\% = \dfrac{50}{100} = 0{,}5$
- $7\,\% = \dfrac{7}{100} = 0{,}07$

Appliquer un pourcentage

Calculer $t\,\%$ d'une quantité Q revient à multiplier cette quantité par $\dfrac{t}{100}$:

$$t\,\% \text{ de } Q = \frac{t}{100} \times Q$$

Exemple

Un magasin propose une réduction de $15\,\%$ sur un article à 80 euros.

Le montant de la réduction est :

$\dfrac{15}{100} \times 80 = 0{,}15 \times 80 = 12$ euros.

Le prix après réduction est : $80 - 12 = 68$ euros.

Calculer un pourcentage

Pour exprimer la proportion d'une partie dans un total sous forme de pourcentage, on calcule :

$$\text{pourcentage} = \frac{\text{partie}}{\text{total}} \times 100$$

Exemple

Dans une classe de 25 élèves, 15 sont des filles.

La proportion de filles en pourcentage est :

$\dfrac{15}{25} \times 100 = 0{,}6 \times 100 = 60$

Il y a $60\,\%$ de filles dans la classe.

Attention

Le pourcentage se calcule toujours par rapport au **total**, pas par rapport à la partie. Par exemple, pour une réduction de 10 euros sur un prix initial de 50

euros, le pourcentage de réduction est $\frac{10}{50} \times 100 = 20\,\%$ (et non $\frac{10}{40} \times 100$).

4 - Échelles

Définition

L'**échelle** d'un plan (ou d'une carte, d'une maquette) est le rapport :

$$\text{échelle} = \frac{\text{distance sur le plan}}{\text{distance dans la réalité}}$$

les deux distances étant exprimées dans la **même unité**.

Exemple

Sur un plan à l'échelle $\frac{1}{200}$, une pièce mesure 4 cm.

Sa longueur réelle est : $4 \times 200 = 800$ cm $= 8$ m.

Exemple

La distance entre deux villes est de 80 km. Sur une carte, elles sont séparées de 4 cm.

On convertit dans la même unité : 80 km $= 8\,000\,000$ cm.

L'échelle est : $\dfrac{4}{8\,000\,000} = \dfrac{1}{2\,000\,000}$.

La carte est à l'échelle $\dfrac{1}{2\,000\,000}$.

Remarque

- Si la distance sur le plan est **inférieure** à la distance réelle, il s'agit d'une **réduction** (exemple : carte routière).
- Si la distance sur le plan est **supérieure** à la distance réelle, il s'agit d'un **agrandissement** (exemple : observation au microscope).

5 - Ratios et partages proportionnels

Définition

Un **ratio** est une comparaison de deux ou plusieurs quantités exprimant leurs proportions relatives. On le note avec le symbole « : ».

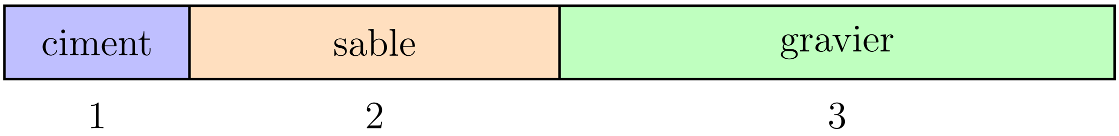
- Le ratio $a : b$ signifie « a parts pour b parts ».
- Le ratio $a : b : c$ signifie « a parts pour b parts pour c parts ».

Exemple

Pour faire du béton, on mélange du ciment, du sable et du gravier dans le ratio $1 : 2 : 3$.

Pour chaque volume de ciment, il faut 2 volumes de sable et 3 volumes de gravier.

Si on prend 3 seaux de ciment, il faut 6 seaux de sable et 9 seaux de gravier.



Partage selon un ratio

Pour partager une quantité Q selon le ratio $a : b$:

1. Calculer le nombre total de parts : $a + b$.
2. Calculer la valeur d'une part : $\dfrac{Q}{a+b}$.
3. Multiplier pour obtenir chaque part.

Exemple

Partager 600 euros entre deux personnes selon le ratio $2 : 3$.

Nombre total de parts : $2 + 3 = 5$.

Valeur d'une part : $\dfrac{600}{5} = 120$ euros.

Première personne : $2 \times 120 = 240$ euros.

Deuxième personne : $3 \times 120 = 360$ euros.

Vérification : $240 + 360 = 600$ euros.

Exemple

Partager 420 mL de jus selon le ratio $3 : 2 : 1$.

Nombre total de parts : $3 + 2 + 1 = 6$.

Valeur d'une part : $\dfrac{420}{6} = 70$ mL.

Quantité 1 : $3 \times 70 = 210$ mL.

Quantité 2 : $2 \times 70 = 140$ mL.

Quantité 3 : $1 \times 70 = 70$ mL.

Vérification : $210 + 140 + 70 = 420$ mL.

Attention

Lors d'un partage selon un ratio, chaque part se calcule par rapport au **total des parts** et non par rapport à la quantité à partager. Par exemple, pour un ratio $2 : 3$, il y a 5 parts au total (et non 2 ou 3).

Les questions essentielles

1. Comment reconnaître une situation de proportionnalité ?

On calcule les quotients de la deuxième ligne par la première ligne pour chaque colonne. Si tous les quotients sont égaux, les grandeurs sont proportionnelles et le quotient commun est le coefficient de proportionnalité.

Voir la fiche méthode : Reconnaître une situation de proportionnalité ↗

2. Comment calculer une quatrième proportionnelle ?

On peut utiliser le coefficient de proportionnalité, le retour à l'unité (passage par 1) ou le produit en croix. Le choix dépend des nombres en jeu.

Voir la fiche méthode : Calculer une quatrième proportionnelle ↗

3. Comment appliquer un pourcentage ?

Pour calculer $t\,\%$ d'une quantité Q, on multiplie Q par $\frac{t}{100}$. Par exemple, $15\,\%$ de $80 = \frac{15}{100} \times 80 = 12$.

Voir la fiche méthode : Appliquer un pourcentage ↗

4. Comment calculer un pourcentage ?

On divise la partie par le total, puis on multiplie par 100. Le pourcentage se calcule toujours par rapport au total de référence.

Voir la fiche méthode : Calculer un pourcentage ↗

5. Comment utiliser une échelle ?

L'échelle est le rapport entre la distance sur le plan et la distance réelle, les deux étant dans la même unité. On l'utilise pour passer de l'une à l'autre par multiplication ou division.

Voir la fiche méthode : Utiliser une échelle ↗