Fractions : sens et comparaison

DURÉE ESTIMÉE

20 minutes

1 - Écriture fractionnaire

Quotient

Soient a et b deux nombres (avec $b \neq 0$).

Le **quotient** de a par b est le nombre qui, multiplié par b, donne a. On le note $a \div b$ ou $\dfrac{a}{b}$.

Dans l'écriture $\dfrac{a}{b}$:

- a est le **numérateur**,
- b est le **dénominateur**.

Exemple

- Le quotient de 5 par 4 est $\frac{5}{4}$. C'est le nombre qui, multiplié par 4, donne 5 : $\frac{5}{4} \times 4 = 5$.
- Le quotient de 2 par 3 est $\frac{2}{3}$. La division $2 \div 3 = 0{,}666\ldots$ ne se termine pas : $\frac{2}{3}$ n'est pas un nombre décimal.

Fraction

Une **fraction** est un quotient de deux nombres **entiers** (le dénominateur étant non nul).

Exemple

- $\frac{3}{7}$, $\frac{15}{4}$ et $\frac{8}{1}$ sont des fractions (numérateur et dénominateur entiers).
- $\frac{2{,}5}{3}$ est une écriture fractionnaire mais pas une fraction car $2{,}5$ n'est pas un entier.

Remarque

- On ne divise jamais par 0 : l'écriture $\frac{a}{0}$ n'a pas de sens.

- Un quotient n'est pas toujours un nombre décimal, mais l'écriture fractionnaire est toujours exacte.
- Tout entier n s'écrit sous forme de fraction : $n = \frac{n}{1}$.

2 - Repérer une fraction sur la droite graduée

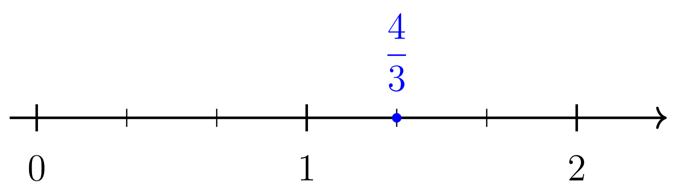
Propriété

Pour placer la fraction $\frac{a}{b}$ (avec a et b entiers, $b > 0$) sur une droite graduée, on partage chaque unité en b parts égales puis on compte a parts à partir de l'origine.

Exemple

Placer $\frac{4}{3}$ sur une droite graduée.

On partage chaque unité en 3 parts égales. Chaque petite graduation représente $\frac{1}{3}$. En comptant 4 parts à partir de 0, on arrive entre 1 et 2.



3 - Décomposition d'une fraction

Propriété

Toute fraction supérieure à 1 peut s'écrire comme la somme d'un nombre entier et d'une fraction inférieure à 1.
On effectue la division euclidienne du numérateur par le dénominateur :
si $a = b \times q + r$ (avec $0 \leqslant r < b$), alors :

$$\frac{a}{b} = q + \frac{r}{b}$$

Exemple

Décomposer $\frac{15}{7}$.

Division euclidienne : $15 = 7 \times 2 + 1$.

$$\frac{15}{7} = 2 + \frac{1}{7}$$

Décomposer $\frac{23}{5}$.

Division euclidienne : $23 = 5 \times 4 + 3$.

$$\frac{23}{5} = 4 + \frac{3}{5}$$

4 - Fractions égales et simplification

Propriété fondamentale

On ne change pas la valeur d'un quotient en **multipliant** ou en **divisant** le numérateur et le dénominateur par un **même nombre non nul** k :

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k} \text{ et } \frac{a}{b} = \frac{a \div k}{b \div k}$$

Exemple

- $\frac{2}{3} = \frac{2 \times 5}{3 \times 5} = \frac{10}{15}$ (on a multiplié numérateur et dénominateur par 5).
- $\frac{24}{36} = \frac{24 \div 12}{36 \div 12} = \frac{2}{3}$ (on a divisé numérateur et dénominateur par 12).
- $\frac{3}{7} = \frac{3 \times 4}{7 \times 4} = \frac{12}{28}$ (on a multiplié par 4).

Simplifier une fraction

Simplifier une fraction, c'est diviser le numérateur et le dénominateur par un même diviseur commun pour obtenir une fraction égale avec des nombres plus petits.
Une fraction est dite **irréductible** lorsqu'elle ne peut plus être simplifiée.

Exemple

Simplifier $\frac{36}{60}$.

On cherche des diviseurs communs à 36 et 60.

36 et 60 sont tous deux divisibles par 12 :

$$\frac{36}{60} = \frac{36 \div 12}{60 \div 12} = \frac{3}{5}$$

3 et 5 n'ont plus de diviseur commun autre que 1 : la fraction $\frac{3}{5}$ est irréductible.

Attention

Pour simplifier, on divise le numérateur **et** le dénominateur par le **même** nombre. On ne peut pas diviser seulement l'un des deux. Les critères de divisibilité (par 2, 3, 5, 9, 10) aident à repérer les diviseurs communs.

5 - Comparaison de fractions

Même dénominateur

Si deux fractions ont le **même dénominateur positif**, la plus grande est celle qui a le **plus grand numérateur**.

Si $a < b$ et $c > 0$, alors $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.

Exemple

$\frac{3}{7} < \frac{5}{7}$ car $3 < 5$ (même dénominateur 7).

Comparer à 1

Pour toute fraction $\frac{a}{b}$ (avec $b > 0$) :

- si $a < b$, alors $\frac{a}{b} < 1$,
- si $a = b$, alors $\frac{a}{b} = 1$,
- si $a > b$, alors $\frac{a}{b} > 1$.

Exemple

- $\frac{3}{4} < 1$ car $3 < 4$.
- $\frac{15}{12} > 1$ car $15 > 12$.

Dénominateurs différents

Pour comparer deux fractions de dénominateurs différents, on les réduit au **même dénominateur** en utilisant la propriété des fractions égales, puis on compare les numérateurs.

Exemple

Comparer $\frac{7}{3}$ et $\frac{13}{6}$.

Le dénominateur 6 est un multiple de 3, donc on écrit $\frac{7}{3}$ avec le dénominateur 6 :

$\frac{7}{3} = \frac{7 \times 2}{3 \times 2} = \frac{14}{6}$

Or $14 > 13$, donc $\frac{14}{6} > \frac{13}{6}$, c'est-à-dire $\frac{7}{3} > \frac{13}{6}$.

Exemple

Ranger dans l'ordre croissant : $\frac{1}{3}$, $\frac{25}{6}$, 2 et $\frac{5}{3}$.

On réduit au dénominateur 6 :

$\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$, $2 = \frac{12}{6}$, $\frac{5}{3} = \frac{10}{6}$.

On compare les numérateurs : $2 < 10 < 12 < 25$.

Rangement : $\frac{1}{3} < \frac{5}{3} < 2 < \frac{25}{6}$.

6 - Fractions et proportions

Proportion

La **proportion** d'une partie dans un tout s'exprime par la fraction :

$$\text{proportion} = \frac{\text{nombre d'éléments de la partie}}{\text{nombre total d'éléments}}$$

Exemple

Dans une classe de 30 élèves, 18 sont des filles.

La proportion de filles est $\dfrac{18}{30}$.

On simplifie : $\dfrac{18}{30} = \dfrac{18 \div 6}{30 \div 6} = \dfrac{3}{5}$.

Fraction, décimal, pourcentage

Une proportion peut s'exprimer sous trois formes équivalentes :

- sous forme de **fraction** : $\dfrac{3}{5}$,
- sous forme de **nombre décimal** : $3 \div 5 = 0{,}6$,
- sous forme de **pourcentage** : $0{,}6 = \dfrac{60}{100} = 60\,\%$.

Un **pourcentage** est une fraction de dénominateur 100.

Exemple

Exprimer $\dfrac{7}{20}$ sous forme décimale et en pourcentage.

$$\frac{7}{20} = \frac{7 \times 5}{20 \times 5} = \frac{35}{100} = 0{,}35 = 35\,\%$$

Les questions essentielles

1. Comment simplifier une fraction ?

On cherche un diviseur commun au numérateur et au dénominateur (en utilisant les critères de divisibilité), puis on divise les deux par ce diviseur. On répète jusqu'à obtenir une fraction irréductible.

Voir la fiche méthode : Simplifier une fraction

2. Comment comparer deux fractions ?

Si elles ont le même dénominateur, on compare les numérateurs. Sinon, on les réduit au même dénominateur en multipliant numérateur et dénominateur de chaque fraction, puis on compare les numérateurs obtenus.

Voir la fiche méthode : Comparer des fractions

3. Comment décomposer une fraction en un entier et une fraction ?

On effectue la division euclidienne du numérateur par le dénominateur. Le quotient donne la partie entière, et le reste donne le numérateur de la fraction restante.

Voir la fiche méthode : Décomposer une fraction

4. Comment exprimer une proportion en pourcentage ?

On écrit la proportion sous forme de fraction, puis on cherche la fraction équivalente de dénominateur 100. Le numérateur obtenu donne directement le pourcentage.

Voir la fiche méthode : Exprimer une proportion en pourcentage

Télécharger en PDF