DIVISIBILITÉ ET NOMBRES PREMIERS

COURS

Divisibilité et nombres premiers

DURÉE ESTIMÉE

25 minutes

OBJECTIFS DU CHAPITRE

- Déterminer si un nombre est multiple ou diviseur d'un autre
- Appliquer les critères de divisibilité
- Reconnaître si un nombre est premier
- Décomposer un entier en produit de facteurs premiers
- Simplifier une fraction grâce à la décomposition

1 - Multiples et diviseurs

Définition

Soient a et b deux entiers naturels (avec $a \neq 0$).

On dit que b est un **multiple** de a (ou que a est un **diviseur** de b, ou encore que b est **divisible** par a) s'il existe un entier naturel k tel que :

$$b = a \times k$$

Exemple

- $42 = 6 \times 7$, donc 42 est un multiple de 6 et 6 est un diviseur de 42.
- 35 est divisible par 5 car $35 = 5 \times 7$.
- 26 n'est pas divisible par 4 car il n'existe aucun entier k tel que $26 = 4 \times k$.

Remarque

- Tout entier naturel n admet toujours 1 et lui-même parmi ses diviseurs : $n = 1 \times n$.
- 0 est un multiple de tout entier naturel : $0 = a \times 0$ pour tout a.
- Tout entier naturel est un multiple de 1.

Diviseurs communs et multiples communs

Un nombre qui est à la fois diviseur de deux entiers est un **diviseur commun** à ces deux entiers ; un nombre qui est à la fois multiple de deux entiers est un **multiple commun**.

- Les diviseurs communs à 12 et 18 sont 1, 2, 3 et 6 (on les trouve en listant les diviseurs de chacun).
- 24 est un multiple commun à 6 et 8 (c'est un multiple de 6 et un multiple de 8).

Repérer les diviseurs communs est utile, par exemple, pour simplifier une fraction.

2 - Division euclidienne

Définition

Effectuer la **division euclidienne** d'un entier naturel a par un entier naturel b (avec $b \neq 0$), c'est trouver deux entiers naturels q et r tels que :

$$a = b \times q + r \text{ avec } 0 \leqslant r < b$$

a est le **dividende**, b le **diviseur**, q le **quotient** et r le **reste**.

Exemple

La division euclidienne de 187 par 15 donne :

$187 = 15 \times 12 + 7$ avec $7 < 15$.

Le quotient est 12 et le reste est 7.

Propriété

Un entier naturel a est **divisible** par un entier naturel b (avec $b \neq 0$) si et seulement si le reste de la division euclidienne de a par b est **nul** (égal à 0).

Exemple

La division euclidienne de 576 par 96 donne :

$576 = 96 \times 6 + 0$.

Le reste est 0, donc 576 est divisible par 96 (et 96 est un diviseur de 576).

3 - Critères de divisibilité

Critères de divisibilité

- **Par 2** : un entier est divisible par 2 si son chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8 (nombre pair).
- **Par 3** : un entier est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est divisible par 3.
- **Par 4** : un entier est divisible par 4 si le nombre formé par ses deux derniers chiffres est divisible par 4.
- **Par 5** : un entier est divisible par 5 si son chiffre des unités est 0 ou 5.
- **Par 9** : un entier est divisible par 9 si la somme de ses chiffres est divisible par 9.
- **Par 10** : un entier est divisible par 10 si son chiffre des unités est 0.

Exemple

Le nombre $2\,754$ est-il divisible par 2 ? par 3 ? par 5 ? par 9 ?

- **Par 2** : oui, car le chiffre des unités est 4 (pair).
- **Par 3** : oui, car $2+7+5+4=18$ et 18 est divisible par 3.
- **Par 5** : non, car le chiffre des unités n'est ni 0 ni 5.
- **Par 9** : oui, car $2+7+5+4=18$ et 18 est divisible par 9.

Exemple

Le nombre $5\,436$ est-il divisible par 4 ?

Le nombre formé par les deux derniers chiffres est 36. Or $36 = 4 \times 9$, donc 36 est divisible par 4.

Par conséquent, $5\,436$ est divisible par 4.

4 - Nombres premiers

Définition

Un **nombre premier** est un entier naturel qui possède exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.

Remarque

- 0 n'est pas premier : il est divisible par tous les entiers.
- 1 n'est pas premier : il n'a qu'un seul diviseur (lui-même).
- 2 est le seul nombre premier pair.

Exemple

- 7 est premier : ses seuls diviseurs sont 1 et 7.

- 12 n'est pas premier : il admet 1, 2, 3, 4, 6 et 12 comme diviseurs.
- 2, 3, 5, 7, 11, 13 sont les nombres premiers inférieurs à 15.

Tester si un nombre est premier

59 est-il premier ?
On teste la divisibilité par les petits nombres premiers :

- 59 est impair, donc non divisible par 2.
- $5 + 9 = 14$, non divisible par 3.
- Le chiffre des unités est 9, donc non divisible par 5.
- $59 = 7 \times 8 + 3$, donc non divisible par 7.

Aucun de ces nombres premiers ne divise 59, donc 59 est premier.

Le crible d'Ératosthène

Le **crible d'Ératosthène** permet de trouver tous les nombres premiers inférieurs à un entier donné :

1. Écrire tous les entiers de 2 jusqu'à la limite choisie.
2. Entourer 2 (premier nombre premier) et barrer tous ses multiples (4, 6, 8, …).
3. Entourer le prochain nombre non barré (3) et barrer tous ses multiples.
4. Répéter : entourer le prochain nombre non barré et barrer ses multiples.

Les nombres entourés (non barrés) sont les nombres premiers.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Les 25 nombres premiers inférieurs à 100 (surlignés en vert) après application du crible.

Les 25 nombres premiers inférieurs à 100

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47,$$
$$53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97$$

5 - Décomposition en produit de facteurs premiers

Propriété

Tout entier naturel supérieur ou égal à 2 peut s'écrire comme un produit de nombres premiers.

Décomposer un entier en facteurs premiers

Pour décomposer un entier en produit de facteurs premiers :

1. Diviser le nombre par le plus petit nombre premier possible (en commençant par 2, puis 3, 5, 7, ...).
2. Diviser le quotient obtenu par le plus petit nombre premier possible.
3. Répéter jusqu'à obtenir le quotient 1.
4. Écrire le produit de tous les facteurs premiers utilisés.

Décomposition de 60

On divise successivement par les nombres premiers :

$60 = 2 \times 30$

$30 = 2 \times 15$

$15 = 3 \times 5$

$5 = 5 \times 1$

$$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 2^2 \times 3 \times 5$$

Décomposition de 84

$84 = 2 \times 42$

$42 = 2 \times 21$

$21 = 3 \times 7$

$7 = 7 \times 1$

$$84 = 2 \times 2 \times 3 \times 7 = 2^2 \times 3 \times 7$$

Application : simplifier une fraction

Simplifier la fraction $\frac{42}{70}$.

On décompose le numérateur et le dénominateur :

$42 = 2 \times 3 \times 7$

$70 = 2 \times 5 \times 7$

On simplifie les facteurs communs (2 et 7) :

$$\frac{42}{70} = \frac{2 \times 3 \times 7}{2 \times 5 \times 7} = \frac{3}{5}$$

Attention

- Ne pas confondre diviseur et multiple : si 5 est un diviseur de 30, alors 30 est un multiple de 5 (pas l'inverse).
- 1 n'est pas un nombre premier (il n'a qu'un seul diviseur).
- Pour simplifier une fraction, on ne peut diviser le numérateur et le dénominateur que par un même facteur commun.

Les questions essentielles

1. Comment savoir si un nombre est un multiple ou un diviseur d'un autre ?

On effectue la division euclidienne : si le reste est nul, le premier nombre est un multiple du second (et le second est un diviseur du premier).

Voir la fiche méthode : Déterminer si un nombre est multiple ou diviseur d'un autre

2. Comment utiliser les critères de divisibilité ?

On regarde le chiffre des unités (pour 2, 5, 10), les deux derniers chiffres (pour 4) ou la somme des chiffres (pour 3 et 9) selon le critère à tester.

Voir la fiche méthode : Appliquer les critères de divisibilité

3. Comment savoir si un nombre est premier ?

On teste s'il est divisible par les petits nombres premiers ($2, 3, 5, 7$ ...) en utilisant les critères de divisibilité. Si aucun ne le divise, il est premier.

Voir la fiche méthode : Reconnaître si un nombre est premier

4. Comment décomposer un nombre en produit de facteurs premiers ?

On divise le nombre par le plus petit nombre premier possible, on répète avec le quotient obtenu jusqu'à arriver à 1, puis on écrit le produit de tous les facteurs premiers utilisés.

Voir la fiche méthode : Décomposer un entier en produit de facteurs premiers

5. Comment simplifier une fraction avec la décomposition ?

On décompose le numérateur et le dénominateur en facteurs premiers, puis on simplifie les facteurs qui apparaissent en commun.

Voir la fiche méthode : Simplifier une fraction grâce à la décomposition

Télécharger en PDF