ALGORITHME DE DICHOTOMIE

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $I = [-4 ; 4]$ par $f(x) = x^3-6x+1$.

PARTIE I

1) f étant une fonction polynomiale, elle est dérivable (et donc continue) sur $]-\infty ; +\infty[$ et a fortiori sur I.

On a $f'(x) = 3x^2-6 = 3(x^2-2) = 3(x+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})$.

$f'(x) = 0$ pour $x_1 = -\sqrt{2}$ et $x_2 = \sqrt{2}$.

f' étant un polynôme du deuxième degré dont le coefficient de x^2 est positif, elle est strictement positive sur $]-\infty ; -\sqrt{2}[$, strictement négative sur $]-\sqrt{2} ; \sqrt{2}[$ et strictement positive sur $]\sqrt{2} ; +\infty[$.

2) Tableau de variations de f sur I :

x	-4		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		4
$f'(x)$	42	+	0	–	0	+	42
$f(x)$	-39	$\nearrow$	$4\sqrt{2}+1)$ $= 6,66$	$\searrow$	$-4\sqrt{2}+1$ $= -4,66$	$\nearrow$	41

3) $f(x)$ est strictement décroissante sur $[-\sqrt{2} ; \sqrt{2}]$ c'est à dire $[-1,414 ; 1,414]$, intervalle auquel appartiennent $x = 0$ et $x = 1$.

On a $f(0) = 1 > 0$ et $f(1) = -4 < 0$. Il s'ensuit qu'il existe une unique solution αpour l'équation $f(x) = 0$ sur $[0 ; 1]$.

PARTIE 2

1) Algorithme de dichotomie pour déterminer une valeur approchée de α :

a	b	h	b – a > h	m	$f(a) \times f(m) > 0$
0	1	0,1	vrai	0,5	faux
0	0,5	0,1	vrai	0,25	faux
0	0,25	0,1	vrai	0,125	vrai
0,125	0,25	0,1	vrai	0,1875	faux
0,125	0,1875	0,1	faux		

2) En sortie d'algorithme, on obtient les valeurs :
a = 0,125 ; b = 0,1875

qui représentent respectivement les estimations inférieure et supérieure de α à 0,1 près.

3) a et b représentent respectivement les estimations inférieure et supérieure (a < b) de α. Elles convergent et se rapprochent de α à chaque étape de l'algorithme, ce dernier s'arrêtant lorsque la différence b – a est inférieure ou égale à une valeur fixée à l'avance, ici h = 0,1. A chaque étape de l'algorithme, une nouvelle valeur de m = (a + b)/2 est calculée et est attribuée à b si $f(a) \times f(m) > 0$ et à a dans le cas contraire, ce qui assure la convergence de a et b vers α.