THEOREME DE LA MEDIANE

1) On développe et on regroupe

$\boxed{AB^2 + AC^2 = (\overrightarrow{AB})^2 + (\overrightarrow{AC})^2}$

$$AB^2 + AC^2 = \left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}\right) \quad + \left(\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AC}\right)$$
$$AB^2 + AC^2 = (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}).(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}) \quad + (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC}).(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC})$$
$$AB^2 + AC^2 = \left(\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AI}\right) + (\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IB}) \quad + (\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{IB}) + (\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{IB})$$
$$+ \left(\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AI}\right) + \left(\overrightarrow{IC}.\overrightarrow{IC}\right) + (\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{IC}).(\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{IC})$$

$$AB^2 + AC^2 = 2\left(\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AI}\right) + \overrightarrow{(IB)}^2 + \overrightarrow{(AI.IB)} + \overrightarrow{(AI.IB)} + \left(\overrightarrow{IC}^2\right) + (\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{IC}).(\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{IC})$$
$$AB^2 + AC^2 = 2\left(\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AI}\right) + \overrightarrow{(IB)}^2 + \left(\overrightarrow{IC}^2\right) + \overrightarrow{AI}.\left(2.\overrightarrow{IB}\right) + \overrightarrow{AI}.(2.\overrightarrow{IC})$$
$$AB^2 + AC^2 = 2\left(\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AI}\right) + \overrightarrow{(IB)}^2 + \left(\overrightarrow{IC}^2\right) + \overrightarrow{AI}.\left(2.\overrightarrow{IB} + 2.\overrightarrow{IC}\right)$$
$$AB^2 + AC^2 = 2\left(\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AI}\right) + \overrightarrow{(IB)}^2 + \left(\overrightarrow{IC}^2\right) + 2.\overrightarrow{AI}.\left(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}\right)$$

Or I milieu du segment [BC], donc $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{O}$

Donc $\boxed{2.\overrightarrow{AI}.\left(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}\right) = \vec{O}}$

$$AB^2 + AC^2 = 2(AI)^2 + (IB)^2 + (IC)^2)$$

I milieu du segment [BC], donc $IB = IC = \frac{1}{2}\ BC\ du\ coup\ (IB)^2 + (IC)^2 = \frac{1}{4}\ BC^2 + \frac{1}{4}\ BC^2$

Donc $\boxed{(\mathrm{IB})^2 + (IC)^2 = \frac{1}{2}\ BC^2}$

On en conclut que $\boxed{AB^2 + AC^2 = 2(AI)^2 + \frac{1}{2}\ BC^2}$

2) Même méthode que précédemment, un signe change

$\boxed{AB^2 - AC^2 = (\overrightarrow{AB})^2 - (\overrightarrow{AC})^2}$

$$AB^2 - AC^2 = \left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}\right) \quad - \left(\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AC}\right)$$
$$AB^2 - AC^2 = (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}).(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}) \quad - (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC}).(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC})$$
$$AB^2 - AC^2 = \left(\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AI}\right) + (\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IB}) \quad + (\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{IB}) + (\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{IB})$$
$$- \left(\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AI}\right) - \left(\overrightarrow{IC}.\overrightarrow{IC}\right) - (\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{IC}).(\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{IC})$$

$$AB^2 - AC^2 = \overrightarrow{(IB)}^2 + \overrightarrow{(AI.IB)} + \overrightarrow{(AI.IB)} - \left(\overrightarrow{IC}^2\right) - (\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{IC}).(\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{IC})$$
$$AB^2 - AC^2 = \overrightarrow{(IB)}^2 - \left(\overrightarrow{IC}^2\right) + \overrightarrow{AI}.\left(2.\overrightarrow{IB}\right) - \overrightarrow{AI}.(2.\overrightarrow{IC})$$
$$AB^2 - AC^2 = \overrightarrow{(IB)}^2 - \left(\overrightarrow{IC}^2\right) + \overrightarrow{AI}.\left(2.\overrightarrow{IB} - 2.\overrightarrow{IC}\right)$$
$$AB^2 - AC^2 = \overrightarrow{(IB)}^2 - \left(\overrightarrow{IC}^2\right) + 2.\overrightarrow{AI}.\left(\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC}\right)$$

Or I milieu du segment [BC], donc $\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{2IB} = \overrightarrow{CB}$

Donc $\boxed{2.\overrightarrow{AI}.\left(\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC}\right) = 2.\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{CB}}$

$AB^2 - AC^2 = 2.\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{CB} + (IB)^2 - (IC)^2$

I milieu du segment [BC], donc $IB = IC = \frac{1}{2}$ BC *du coup* $(IB)^2 - (IC)^2 = \frac{1}{4}BC^2 - \frac{1}{4}BC^2$

Donc $\boxed{(\mathrm{IB})^2 - (IC)^2 = 0}$

On en conclut que $\boxed{AB^2 - AC^2 = 2.\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{CB}}$

3) On développe puis on cherche à intégrer $\overrightarrow{BC}$

$\boxed{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}).(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC})}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AI})^2 + \overrightarrow{IB}.\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{IC})$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AI})^2 + \overrightarrow{AI}.(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}) + \overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IC}$

Or I milieu du segment [BC], donc $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{O}$

Donc on obtient $\boxed{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AI})^2 + \overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IC}}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AI^2 + \overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IC}$

I milieu du segment [BC], et $\overrightarrow{BC}$ *orienté de B vers C*

Donc $\boxed{\overrightarrow{IB} = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC})}$ *et de même* $\boxed{\overrightarrow{IC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC})}$ *(attention au signe)*

$\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IC} = -\frac{1}{4}(\overrightarrow{BC})^2$

On en déduit $\boxed{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AI^2 - \frac{1}{4}BC^2}$