

1)

Soit X_A l'âge d'Alice et X_C celui de Clément. X_A et $X_C \in \mathbb{N}^*$ et sont solutions de l'équation générale du second degré :

$a(x-X_A)(x-X_C) = 0$ qui peut encore s'écrire sous forme de trinôme :

$ax^2 - a(X_A+X_C)x + aX_AX_C = 0$ avec $a \in \mathbb{Z}^*$ puisque les coefficients sont entiers.

Par ailleurs, on sait d'après l'énoncé que pour $x = 1$ la somme des coefficients du trinôme est égale à $X_A - 1$, ce qui revient à dire que :

$a(1-X_A)(1-X_C) = X_A - 1$ qui peut s'écrire $(X_A - 1)[a(X_C - 1) - 1] = 0$.

Il est évident que $X_A \neq 1$. Donc on doit avoir $a(X_C - 1) - 1 = 0$, ou encore, puisque $a \neq 0$:

$$X_C = (a+1)/a$$

La seule solution possible en nombres entiers est $a = 1$ et $X_C = 2$.

Clément a 2 ans.

2)

Le trinôme du second degré s'écrit, en tenant compte que $a = 1$ et $X_C = 2$:

$$x^2 - (X_A + 2)x + 2X_A.$$

On sait d'après l'énoncé qu'il existe une valeur X de x , avec $X \in \mathbb{N}^*$ et $X \neq X_A$, telle que :

$$X^2 - (X_A + 2)X + 2X_A = -55.$$

Posons $X = X_A + n$ avec $n \in \mathbb{Z}^*$. L'égalité ci-dessus s'écrit :

$$(X_A + n)^2 - (X_A + 2)(X_A + n) + 2X_A = -55$$

En développant et réarrangeant le premier membre de l'égalité, on obtient :

$$n(n + X_A - 2) = -55.$$

Si $n > 0$, comme $X_A - 2 > 0$ (Alice est plus âgée que Clément), on aurait $n(n + X_A - 2) > 0$, ce qui est contradictoire, donc $n < 0$, c'est à dire $n \in \mathbb{Z}^-$.

Comme $-55 = -5 \times 11$ est divisible par n , on a $n = -1$ ou $n = -5$ ou $n = -11$ ou $n = -55$

Si $n = -1$, alors $(-1 + X_A - 2) = 55$ et $X_A = 58$, impossible car $10 \leq X_A \leq 50$.

Si $n = -5$, alors $(-5 + X_A - 2) = 11$ et $X_A = 18$.

Si $n = -11$, alors $(-11 + X_A - 2) = 5$ et $X_A = 18$.

Si $n = -55$, alors $(-55 + X_A - 2) = 1$ et $X_A = 58$, impossible car $10 \leq X_A \leq 50$.

Donc Alice a 18 ans.

NB)

Le trinôme écrit par Alice dans la marge de sa feuille est $x^2 - 20x + 36$.

$$f(x) = x^2 - 20x + 36$$

$$f(X_C) = f(2) = 2^2 - 20 \times 2 + 36 = 4 - 40 + 36 = 0$$

$$f(X_A) = f(18) = 18^2 - 20 \times 18 + 36 = 324 - 360 + 36 = 0$$

$$f(1) = 1 - 20 + 36 = 17 = X_A - 1$$

$$f(X_A - 11) = f(7) = 49 - 140 + 36 = -55 \text{ (cas } n = -11)$$

$$f(X_A - 5) = f(13) = 169 - 260 + 36 = -55 \text{ (cas } n = -5)$$

Bob aurait donc estimé qu'Alice avait 7 ou 13 ans. On peut sans doute éliminer le premier cas car, même en admettant que l'on n'ait pas dit à Bob qu'Alice avait entre 10 et 50 ans, il aurait fallu qu'elle soit extrêmement précoce pour savoir à 7 ans ce qu'est un trinôme du second degré. Bob a donc très probablement donné 13 ans à Alice, ce qui a certainement dû vexer cette dernière.