QCM NOMBRES COMPLEXES – BAC S CENTRES ÉTRANGERS 2009

1) <u>Faux.</u>
En effet, si $z = a + \mathrm{i}b$ on a $z^2 = a^2 - b^2 + \mathrm{i}2ab$, et donc :
$\mathrm{Re}(z^2) = a^2 - b^2$ et $[\mathrm{Re}(z)]^2 = a^2$.
Donc la proposition n'est vraie que si la partie imaginaire b de z est nulle. Elle est fausse dans tous les autres cas.
Par exemple, si $z = 3 + 2\mathrm{i}$, alors $\mathrm{Re}(z^2) = 5 \neq [\mathrm{Re}(z)]^2 = 9$.

2) <u>Vrai.</u>
Si les points M, N et P, respectivement d'affixe z, $\bar{z}$ et $\dfrac{z^2}{\bar{z}}$, sont sur un même cercle centré sur O, alors leurs modules sont égaux. C'est vrai pour z et son conjugué $\bar{z}$. Par ailleurs le module du carré d'un nombre complexe est égal au carré de son module et le module du quotient de deux nombres complexes est égal au quotient de leurs modules. Ce qui se traduit par :

$$|z| = |\bar{z}| \text{ et } \frac{|z^2|}{|\bar{z}|} = \frac{|z|^2}{|z|} = |z| \text{ .}$$

La proposition est donc vérifiée.

3) Vrai.
Soit $z = a + \mathrm{i}b$, alors $\mathrm{i}z = -b + \mathrm{i}a$.

$1 + \mathrm{i}z = 1 - b + \mathrm{i}a$ et $1 - \mathrm{i}z = 1 + b - \mathrm{i}a$.

$$|1 + \mathrm{i}z| = \sqrt{(1 - b^2) + a^2} = \sqrt{1 - 2b + b^2 + a^2}$$

$$|1 - \mathrm{i}z| = \sqrt{(1 + b^2) + a^2} = \sqrt{1 + 2b + b^2 + a^2}$$

Si $|1 + \mathrm{i}z| = |1 - \mathrm{i}z|$ alors $\sqrt{1 - 2b + b^2 + a^2} = \sqrt{1 + 2b + b^2 + a^2}$ et

$1 - 2b + b^2 + a^2 = 1 + 2b + b^2 + a^2 \Rightarrow -2b = 2b \Rightarrow b = 0.$

La proposition est vérifiée.

4) <u>Vrai.</u>
Posons $z = a + \mathrm{i}\,b$ et $z' = a' + \mathrm{i}\,b'$, affixes respectivement de M et M'.

Les droites (OM) et (OM') sont perpendiculaires si et seulement si $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM'} = 0$ soit $aa' + bb' = 0$.

Par ailleurs :

$z + z' = (a + a') + \mathrm{i}(b + b')$ et $z - z' = (a - a') + \mathrm{i}(b - b')$

$$|z + z'| = \sqrt{(a + a')^2 + (b + b')^2} = \sqrt{a^2 + 2aa' + a'^2 + b^2 + 2bb' + b'^2} = \sqrt{(a^2 + a'^2 + b^2 + b'^2) + 2(aa' + bb')}$$

$$|z - z'| = \sqrt{(a - a')^2 + (b - b')^2} = \sqrt{a^2 - 2aa' + a'^2 + b^2 - 2bb' + b'^2} = \sqrt{(a^2 + a'^2 + b^2 + b'^2) - 2(aa' + bb')}$$

$|z + z'| = |z - z'| \Leftrightarrow aa' + bb' = 0.$

La proposition est vérifiée.