1°) On sait que A(1 ;1), B(5 ;-1) et C(2 ;3). On admettra D(xd;yd).

Si ABCD est un parallélogramme alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$,

Alors $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} xb - xa \\ yb - ya \end{pmatrix} = \overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} xc - xd \\ yc - yd \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 5 - 1 \\ (-1) - 1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} 2 - xd \\ 3 - yd \end{pmatrix}$

On a 4 = 2-xd et -2 = 3-yd ⇔ xd=-2 et yd=5.

Vérifions que D(-2 ;5) avec l'égalité $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} xc - xb \\ yc - yb \end{pmatrix} = \overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} xd - xa \\ yd - ya \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 2 - 5 \\ 3 - (-1) \end{pmatrix} = \overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} (-2) - 1 \\ 5 - 1 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ L'égalité est vérifiée.

2°) Si ABEC est un parallélogramme alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AC}$,

Alors $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} xb - xa \\ yb - ya \end{pmatrix} = \overrightarrow{CE}\begin{pmatrix} xe - xc \\ ye - yc \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 5 - 1 \\ (-1) - 1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{CE}\begin{pmatrix} xe - 2 \\ ye - 3 \end{pmatrix}$

On a 4 = xe-2 et -2 =ye-3 ⇔ xe=6 et ye=1.

Vérifions que E(6 ;1) avec l'égalité $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AC}$:

$\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix} xe - xb \\ ye - yb \end{pmatrix} = \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} xc - xa \\ yc - ya \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{BE}\begin{pmatrix} 6 - 5 \\ 1 - (-1) \end{pmatrix} = \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 2 - 1 \\ 3 - 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{BE}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$

L'égalité est vérifiée.

3°) On sait que $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et que $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{CE}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

Pour prouver que le parallélogramme ABEC est un rectangle, nous n'avons plus qu'à prouver qu'au moins un de ses angles est droit grâce à Pythagore :

- $\|\overrightarrow{AB}\| = AB = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$
- $\|\overrightarrow{BE}\| = BE = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$
- $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE}\begin{pmatrix} x(ab) + x(be) \\ y(ab) + y(be) \end{pmatrix} = \overrightarrow{AE}\begin{pmatrix} 4 + 1 \\ -2 + 2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AE}\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $\|\overrightarrow{AE}\| = AE = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{5^2 + 0^2} = 5$
- $AE^2 = AB^2 + BE^2$ ⇔ $5^2 = (2\sqrt{5})^2 + (\sqrt{5})^2$ ⇔ 25=20+5

L'égalité est vérifiée, $\widehat{ABE}$ est un angle droit.

De plus comme $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CE}$ ou $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AC}$, nous pouvons affirmer que ABEC est un parallélogramme particulier, c'est un rectangle.