Soit $g(x) = f\left(x + \frac{3}{10}\right) - f(x)$.

Comme $f\left(x + \frac{3}{10}\right) \neq f(x)$ $\forall x \in \left[0 ; \frac{7}{10}\right]$

alors $g(x)$ ne s'annule pas sur $\left[0 ; \frac{7}{10}\right]$

Supposons $g(0) \geqslant 0$.

alors $f\left(x + \frac{3}{10}\right) > f(x)$

et $f\left(\frac{3}{10}\right) > 0$ (par hypothèse $f(0) = 0$)

et $f\left(\frac{6}{10}\right) > f\left(\frac{3}{10}\right) > 0$.

De même $f\left(x - \frac{3}{10}\right) < f(x)$.

d'où $f\left(\frac{7}{10}\right) < 0$ (par hypothèse $f(1) = 0$)

et $f\left(\frac{4}{10}\right) < 0$. et $f\left(\frac{1}{10}\right) < 0$.

Donc par application du théorème des valeurs intermédiaires on a :

$f(0) = 0$, $f(1) = 0$, $f(x)$ qui s'annule entre $\frac{1}{10}$ et $\frac{3}{10}$, entre $\frac{3}{10}$ et $\frac{4}{10}$, entre $\frac{4}{10}$ et $\frac{6}{10}$ entre 0 et $\frac{1}{10}$ et entre $\frac{6}{10}$ et $\frac{7}{10}$.