ÉQUATION TRIGONOMÉTRIQUE (4)

Résoudre dans l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$ l'équation $\cos(3x)=\sin(2x)$.

On remarque que $\cos(a)=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\pm a\right)$. On peut donc écrire :

$$\cos(3x)=\sin(2x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}\pm 3x\right)\Rightarrow 2x+2k\pi=\frac{\pi}{2}\pm 3x \text{ avec } k\in\mathbf{Z}.$$

On obtient deux ensembles de solutions :

i) $2x+2k\pi=\dfrac{\pi}{2}+3x\Rightarrow x=2k\pi-\dfrac{\pi}{2}$ avec $k\in\mathbf{Z}$.

Les solutions sont cherchées sur l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$, c'est à dire que l'on doit avoir la double inégalité :

$-\pi<2k\pi-\dfrac{\pi}{2}\le\pi\Rightarrow-\dfrac{\pi}{2}<2k\pi\le 3\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow-\dfrac{1}{4}<k\le\dfrac{3}{4}$, et comme $k\in\mathbf{Z}$, la seule solution possible pour k est $k=0$, d'où une seule solution pour x : $x=-\dfrac{\pi}{2}$

ii) $2x+2k\pi=\dfrac{\pi}{2}-3x\Rightarrow x=\dfrac{\pi}{10}-\dfrac{2k\pi}{5}$, avec $k\in\mathbf{Z}$.

Cela conduit pour k à la double inégalité suivante :

$-\pi<\dfrac{\pi}{10}-\dfrac{2k\pi}{5}\le\pi\Rightarrow-\dfrac{11\pi}{20}<-\dfrac{k\pi}{5}\le\dfrac{2\pi}{5}\Rightarrow\dfrac{-11}{4}<-k\le 2\Rightarrow-2\le k<\dfrac{11}{4}$.

Finalement, puisque $k\in\mathbf{Z}$, on obtient $-2\le k\le 2$, ce qui aboutit aux cinq solutions données dans le tableau suivant :

k	-2	-1	0	1	2
x	$\dfrac{9\pi}{10}$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\dfrac{\pi}{10}$	$-\dfrac{3\pi}{10}$	$-\dfrac{7\pi}{10}$

Donc en tout six solutions sur $]-\pi\,;\,\pi]$ représentées ci-dessous sur le cercle trigonométrique :