

Soit EF la perpendiculaire en F à AB, et EG la perpendiculaire en G à CD.

Dans les triangles homothétiques AEF et CEG on a la relation  $\frac{AF}{EF} = \frac{CG}{EG}$ .

Dans les triangles homothétiques FBE et GDE on a la relation  $\frac{FB}{EF} = \frac{GD}{EG}$ .

En additionnant membre à membre ces deux égalités, on obtient :

$$\frac{AF}{EF} + \frac{FB}{EF} = \frac{CG}{EG} + \frac{GD}{EG}, \text{ soit } \frac{AB}{EF} = \frac{CD}{EG}, \text{ d'où } \frac{AB}{CD} = \frac{EF}{EG} \quad (1).$$

Par ailleurs, d'après l'énoncé :

$$\text{Aire}(ABE) = \frac{AB \times EF}{2} = 32 \text{ cm}^2 \text{ et } \text{Aire}(ABE) = \frac{CD \times EG}{2} = 18 \text{ cm}^2, \text{ d'où l'on tire :}$$

$$AB \times EF = 64, CD \times EG = 36 \text{ et } \frac{AB \times EF}{CD \times EG} = \frac{64}{36} = \frac{16}{9}. \text{ En combinant avec (1), on obtient :}$$

$$\frac{AB}{CD} = \frac{EF}{EG} = \frac{4}{3}.$$

$$\text{Posons } AB = x, x > 0. \text{ Alors } CD = \frac{3x}{4}, EF = \frac{64}{x} \text{ et } EG = \frac{48}{x}.$$

On calcule l'aire du trapèze ABCD en fonction de  $x$  :

$$\text{Aire}(ABCD) = \frac{1}{2}(EF + EG)(AB + CD) = \frac{1}{2}\left(\frac{64}{x} + \frac{48}{x}\right)\left(x + \frac{3x}{4}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{112}{x} \times \frac{7x}{4} = 98 \text{ cm}^2$$

En fonction de  $x$ , il existe une infinité de trapèzes satisfaisant ces conditions.

Ils ont tous la même aire égale à :  $98 \text{ cm}^2$ .

Dans l'exemple ci-dessous, on a choisi (en cm) :  $AB = 16$  d'où l'on déduit  $CD = 12$ ,  $EF = 4$ ,  $EG = 3$  et  $FG = 7$ .

$$\text{On a } \text{Aire}(ABCD) = \frac{FG(AB + CD)}{2} = \frac{7(16 + 12)}{2} = 98 \text{ cm}^2.$$

