1. Soit la suite définie par

$u0 = 2$; $u_{n+1} = u_n{}^2 / 2 + 1$

Calculer u_0, u_1, u_2, u_3 et u_4. Quel semble être le sens de variation de cette suite ?

$U_0 = 2$

$U_1 = u_0^2/2 + 1 = 2^2/2 + 1 = 3$

$U_2 = u_1^2/2 +1 = 3^2/2 +1 = 11/2 > 5$

$U_3 = u_2^2/2 +1 = 11^2 / 22 + 1 = 129 / 8 > 15$

$U_4 = u_3^2/2 +1 = 129^2 / (8^2 \text{ x } 2) + 1 = 16641/128 +1 = 16769 / 128 > 131$

La suite u n semble donc être croissante.

2. Etudier le sens de variation de la fonction $f(x) = ½ x^2 + 1$ sur $[0 ; + \infty [$

La fonction f(x) est la somme d'une fonction $½ x^2$ qui est strictement croissante dans l'intervalle

$[0 ; + \infty [$ et d'une fonction constante. Elle est donc strictement croissante pour tout $x > 0$.

En posant $x = u_n$, il vient $f (u_n) = ½ u_n{}^2 + 1 = u_{n+1}$ et de même $f (u_{n-1}) = ½ u_{n-1}{}^2 + 1 = u_n$

La fonction f(x) étant croissante, on peut écrire :

Si $u_n > u_{n-1}$, alors $f(u_n) > f (u_{n-1})$

Soit

Si $u_n > u_{n-1}$, alors $u_{n+1} > u_n$

Comme la suite est définie par $u\ 0 = 2$ et $u\ 1 = 3 > u0$, on en déduit par récurrence que $u_{n+1} > u_n$ pour tout n.

La suite u_n est donc croissante.

ATTENTION :

Montrer que f(x) est une fonction croissante ne suffit pas à démontrer que u_n étant définie par $u_{n+1} = f(u_n)$, alors u_n est une suite croissante

Suite définie par $u0 = 4$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$

La fonction $\sqrt{x}$ est une fonction croissante. Mais la suite u_n est décroissante.

2. Calculer et étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$

$u_{n+1} - u_n = u_n^2 / 2 - u_n + 1 = = ½ [(u_n - 1)^2 + 1] > 0$ pour tout u_n.

On a donc pour tout n, $u_{n+1} > u_n$..

La suite u_n est donc croissante.